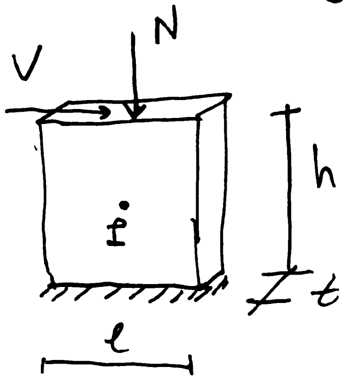
RESISTENZA A TAGLIO PER TRAZIONE

Padova, 28/5/2014

- circolare 617/2009 § C.8.7.1.5, formula (8.7.1.1)

$$V_t = l \cdot t \cdot \frac{1.5\,\tau_{od}}{b}\sqrt{1+\frac{\sigma_0}{1.5\,\tau_{od}}} = l \cdot t \cdot \frac{f_{td}}{b}\sqrt{1+\frac{\sigma_0}{f_{td}}}$$



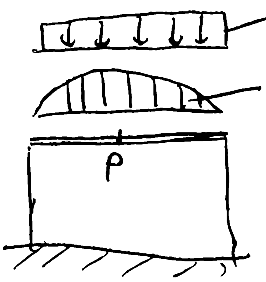
$1 \leq b \leq 1.5$

f_t = resistenza a trazione per fessurazione diagonale

τ_{od} = corrispondente resistenza a taglio di riferimento [in assenza di sforzo normale]

$\sigma_0 = N/A \leftarrow A = l \cdot t$

- stato di tensione al centro del pannello



$\sigma_0 \Rightarrow$ in realtà ci sarebbe pressoflessione anche con N centrato (c'è il momento $V \cdot \frac{h}{2}$), ma nel punto centrale, almeno se l'eccentricità e è minore di $l/6$ (sezione non parzializzata), la tensione è proprio σ_0

la distribuzione delle τ non è proprio nota, ma si suppone che il valore (massimo) al centro sia proporzionale alla tensione tangenziale media $\bar{\tau} = V/A \rightarrow l \cdot t$

ossia $\tau_P = \tau_{max} = b \cdot \bar{\tau}$

b si considera compreso fra 1 (pannelli tozzi) e 1.5 (pannelli snelli), ossia si suppone che la distribuzione delle tensioni tangenziali possa variare da un profilo costante $\tau(x) = \bar{\tau}$ (per rapporti $h/l \leq 1$) a un profilo parabolico con $\tau(l/2) = 1.5\,\bar{\tau}$ (per rapporti $\frac{h}{l} \geq 1.5$ → vedi teoria della trave (Jourawsky))

[resistenza a taglio per trazione]

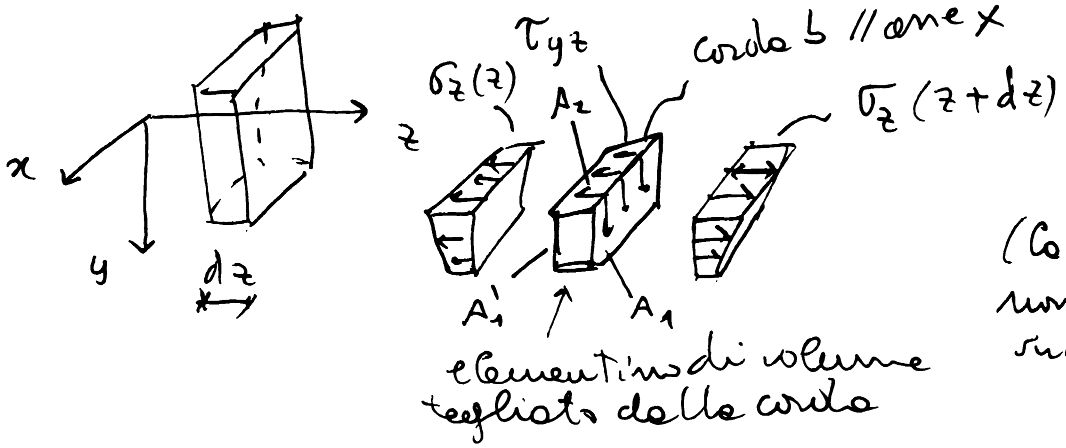
Padova, 28/5/2014

②

JOURAWSKY — Trattazione approssimata del taglio

→ Vale in pratica per il solido di De Saint Venant (trave, facce laterali non caricate)

Versione semplificata per sezioni rettangolari



Ipotesi semplificate al max:

$A_1 = A_1'$, $A_2 = b \cdot dz$

(la sezione non varia, non si considerano τ sulle facce esterne)

Equilibrio alla traslazione in direzione z

$$\int_{A_1} \sigma_z(z+dz)\,dA - \int_{A_1'} \sigma_z(z)\,dA - \int_{A_2} \underbrace{\tau_{yz}(x,z)}\,dA = 0$$

$A_1' = A_1$

→ perché la corda è parallela all'asse x (y = cost) volendo si potrebbe generalizzare a corde inclinate

Sviluppo in serie di Taylor (al primo ordine)

$$\sigma_z(z+dz) = \sigma_z(z) + \frac{\partial \sigma_z(z)}{\partial z} \cdot dz$$

$$\int_{A_1} \left(\cancel{\sigma_z(z)} + \frac{\partial \sigma_z(z)}{\partial z} dz - \cancel{\sigma_z(z)} \right) dA - \int_{A_2} \tau_{yz}(x,z)\, dA = 0$$

$$\int_{A_1} \frac{\partial \sigma_z(z)}{\partial z} \underbrace{dz}\, dA - \int_{A_2} \underbrace{\tau_{yz}(x,z)}\,dA = 0 \qquad \int dA = b \cdot dz = A_2$$

~~cost~~ non dipende da dA, si può portar fuori

→ si può considerare un valor medio integrale $\overline{\tau}_{yz}$

$$\underline{dz} \cdot \int_{A_1} \frac{\partial \sigma_z(z)}{\partial z} dA - \overline{\tau}_{yz}\, b\, \underline{dz} = 0$$

dz è arbitrario, quindi non nullo, e si può semplificare

$$\overline{\tau}_{yz} = \frac{1}{b} \int_{A_1} \frac{\partial \sigma_z(z)}{\partial z} dA$$

[resistenza a taglio per trazione] Padova, 28/5/2014

3

Formula di Navier (semplificata, solo un momento M_x)

$$\sigma_z(y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x}\cdot y \quad \Big(-\underbrace{\frac{M_y}{J_y}x}_{\text{non lo consideriamo}}\Big)$$

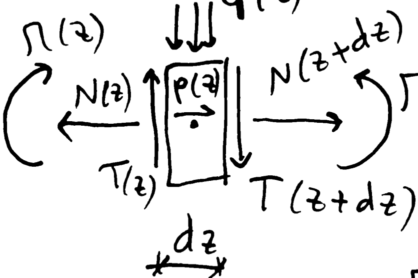
derivandola rispetto a z (con N costante) si ottiene:

$$\frac{\partial \sigma_z(z)}{\partial z} = 0 + \frac{\partial M_x(z)}{\partial z}\cdot \frac{y}{J_x}$$

$\frac{y}{J_x} \longrightarrow$ considerato costante al variare di z (la sezione non varia)

Equazioni indefinite di equilibrio della trave

Caso semplice: trave piana ed asse rettilineo



Eq. rotazione attorno al baricentro

N non dà contributo, neanche p e q

$$M(z+dz) - M(z) + T(z+dz)\frac{dz}{2} - T(z)\frac{dz}{2} = 0$$

$$M(z+dz) = M(z) + \frac{\partial M}{\partial z}dz \qquad T(z+dz) = T(z) + \frac{dT}{dz}dz$$

$$\cancel{M(z)} + \frac{dM}{dz}\cdot dz - \cancel{M(z)} - T(z)\frac{dz}{2} - \underbrace{\frac{dT}{dz}\frac{dz^2}{2}}_{\text{trascurabile}} - T(z)\frac{dz}{2} = 0$$

dz arbitrario si semplifica

$$\frac{dM(z)}{dz} = T(z)$$

quindi si ottiene $\displaystyle \frac{\partial \sigma_z(z)}{\partial z} = \frac{\partial M_x(z)}{\partial z}\cdot\frac{y}{J_x} = \frac{T_y(z)}{J_x}\cdot y$

tornando a $\displaystyle \bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b}\int_{A_1} \frac{\partial \sigma_z(z)}{\partial z}\cdot dA$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b}\int_{A_1} \frac{T_y(z)}{J_x}\cdot y\, dA = \frac{T_y}{J_x\cdot b}\cdot \int_{A_1} y\, dA$$

questo termine è il momento statico dell'area tagliata dalla corda, detto S^*

quindi $\displaystyle \bar{\tau}_{yz} = \frac{T_y\, S^*}{J_x\cdot b}$

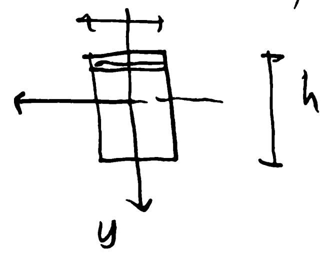
l'approssimazione di Jourawsky consiste nel considerare la tensione $\bar{\tau}_{yz}$ della formula (che è la media lungo la corda) come uniforme sulla corda

[resistenza a taglio per trazione]

Padova, 28/5/2014

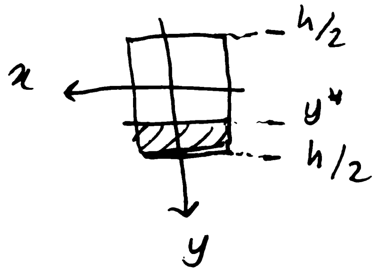
(4)

Nel caso di sezioni rettangolari:



$$J_{xx} = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} y^2 \cdot \underbrace{b \cdot dy}_{dA}$$

$$= b \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} = b \left(\frac{h^3}{3 \cdot 8} - \left(-\frac{h^3}{3 \cdot 8} \right) \right) = \frac{1}{12} b h^3$$



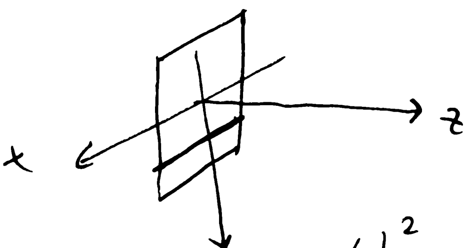
$$S^* = \int_{A^*} y \, dA = \int_{A^*} y \cdot b \cdot dy$$

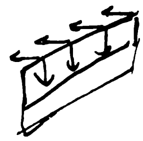
$$= b \int_{y^*}^{h/2} y \, dy = b \left| \frac{y^2}{2} \right|_{y^*}^{h/2}$$

$$= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^{*2} \right) \longrightarrow \text{max per } y^* = 0 \rightarrow S^*(0) = \frac{1}{8} b h^2$$

• Variazione di $|\overline{\tau}_{yz}| = |\overline{\tau}_{zy}|$ lungo y:

supponiamo una distribuzione uniforme lungo le corde // x

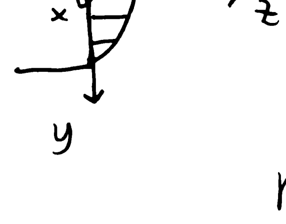




$$\tau(y) = \frac{T_y \cdot S^*}{J_x \cdot b}$$

$$\tau(y^*) = T_y \cdot \frac{\frac{1}{2} \cancel{b} \left(\frac{h^2}{4} - y^{*2} \right)}{\frac{1}{12} b h^3 \cdot \cancel{b}} = 6 \frac{T_y}{b \cdot h} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^{*2}}{h^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} \left(1 - \frac{4 y^{*2}}{h^2} \right)$$

$\tau(y)$ è quindi una parabola con valore nullo a $\pm \frac{h}{2}$ e valore massimo (vertice in $y=0$) pari a $\frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} = 1.5 \, \overline{\tau}_y$



se $\overline{\tau}_y = \frac{T_y}{A}$, $A \rightarrow b \cdot h$ $\Rightarrow \boxed{\hat{\tau}_{max} = 1.5 \, \overline{\tau}_y}$

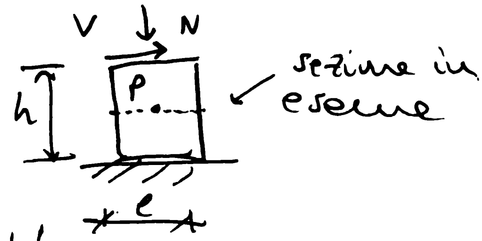
1.5 è infatti il valore di b suggerito per pannelli snelli (che quindi si presume comportarsi più similmente a una trave)

[resistenza a taglio per trazione] Padova, 28/5/2014

5

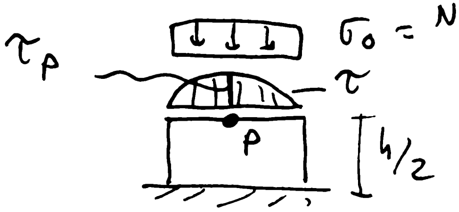
1.5 è proprio il valore indicato da Turnsek e Čačović per muri con $h/l \geq 1.5$ (ossia snelli)
[diciamo che va bene anche per $h/d > 0.67$ (i.e. $\frac{2}{3}$), a patto che l'eccentricità sia minore di $l/6$]

Ricapitolando: si considera lo stato di tensione al centro del pannello murario (punto P)



si ipotizza una distribuzione uniforme di tensioni normali $\sigma_0 = \underbrace{\frac{N}{l \cdot t}}$ ← area della sezione

si ipotizza una distribuzione di tensioni tangenziali τ che vari da uniforme (pannelli tozzi, $h/l \leq 1$) a parabolica (pannelli murari snelli con $h/l \geq 1.5$). Quest'ultima deriva dalla teoria del taglio per sez. rettangolari (Jourawsky)



Al centro del pannello si considera quindi agente σ_0 e τ_p

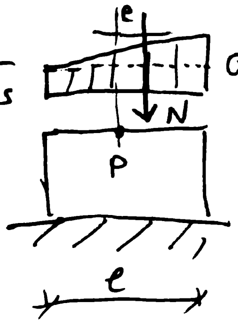
τ_p è proporzionale alla $\bar{\tau}$ media data da $V/l \cdot t$: $\tau_p = b \cdot \bar{\tau} = b \cdot \frac{V}{l \cdot t}$

il fattore di proporzionalità b varia quindi fra 1 e 1.5, secondo le ipotesi enunciate

$$\Rightarrow \bar{\tau} \leq \tau_p \leq 1.5\,\bar{\tau}$$

τ_p è la tensione tangenziale massima, che si ha al centro del pannello

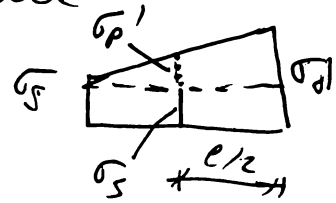
A rigore, la tensione normale non sarebbe uniformemente distribuita nella sezione centrale del pannello, poiché c'è un momento pari a $V \cdot h/2$ che sposta la risultante delle compressioni, però, se l'eccentricità e è minore di $l/6$ (ossia N contenuto nel nocciolo centrale), allora la tensione normale in P è comunque σ_0 [sezione non parzializzata] infatti, se la sezione non è parzializzata (ossia $e \leq l/6$) la distribuzione di σ è trapezoidale, al più triangolare



Per l'equilibrio: $N = \dfrac{\sigma_s + \sigma_d}{2} \cdot l \cdot t$

$$\frac{N}{l \cdot t} = \sigma_0 = \frac{\sigma_s + \sigma_d}{2}$$

In P, la tensione sarà data dalla somma di σ_s (al più nulla) e σ_p'



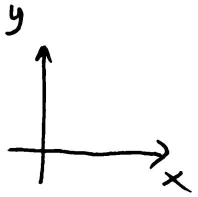
$$\frac{\sigma_p'}{l/2} = \frac{\sigma_d - \sigma_s}{l} \Rightarrow \sigma_p' = \frac{1}{2}(\sigma_d - \sigma_s)$$

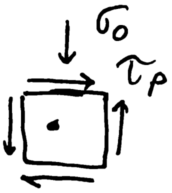
quindi $\sigma_p = \sigma_s + \sigma_p' = \sigma_s + \frac{1}{2}\sigma_d - \frac{1}{2}\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_s + \sigma_d) = \sigma_0$

ossia $\underline{\underline{\sigma_p = \sigma_0}}$

<u>NOTA</u> ciò non sembra valere per sezioni <u>parzializzate</u>! Quindi?

• stato di tensione attorno al punto centrale P





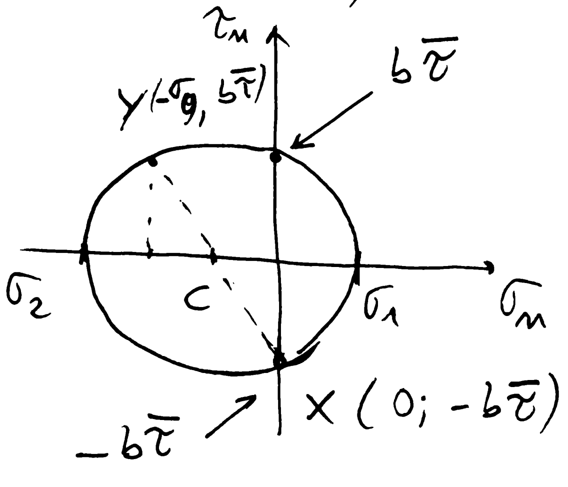
<u>direzione</u> y: $\sigma_y = -|\sigma_0| < 0$

convenzione di Mohr: positivo perché tende a far ruotare il volumetto in senso orario → $\tau_{yx} = \tau_p = b \cdot \bar{\tau}$

<u>NOTA</u> assumiamo σ_0 come valore positivo (modulo della tensione normale)

<u>direzione</u> x: $\sigma_x = 0$

negativo per la convenzione di Mohr → $\tau_{xy} = -\tau_{yx} = -b \cdot \bar{\tau}$



X → rappresenta la tensione sul piano di normale // asse x

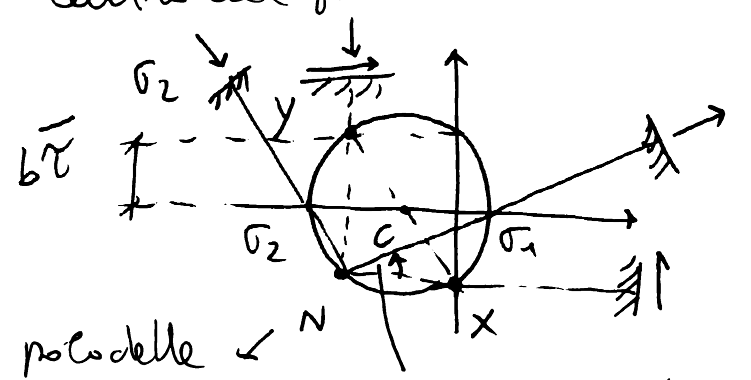
Y → ... sul piano di normale // y

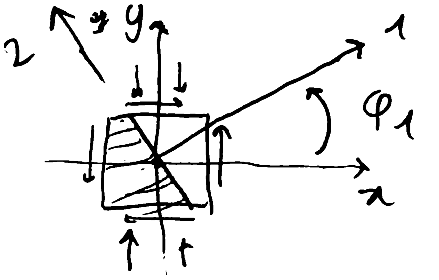
C: $x_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\sigma_0}{2}$

$y_c = 0$

[resistenza a taglio per trazione] Padova, 28/5/2014

Cerchio di Mohr per lo stato di tensione al centro del pannello

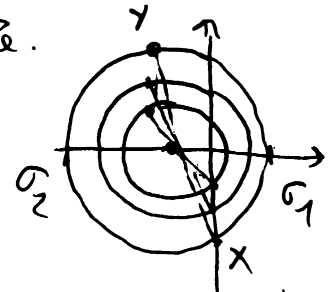




angolo φ_1 tra la direzione principale 1 e l'asse x

Quello che interessa è il valore di σ_1, tensione principale di trazione: tenendo fisso σ_0, che è un dato di progetto, si faccia aumentare il valore della forza orizzontale V (quindi di $\bar{\tau} = \frac{V}{\ell t}$ e, di conseguenza, il valore di $\tau_p = b \cdot \bar{\tau}$ che è il massimo sforzo tangenziale che si ha, comunque, al centro del pannello)

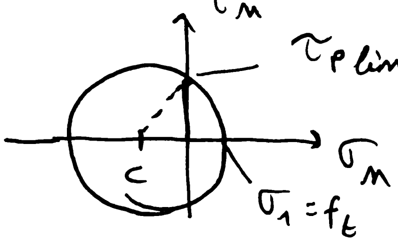
I corrispondenti cerchi sono concentrici ($X_c = -\frac{\sigma_0}{2}$ che non varia, $y_c = 0$) con raggio che aumenta (infatti aumenta il valore della tensione tangenziale.



Quindi aumentano σ_2 (tensione principale di compressione) e σ_1 (tens. princ. di trazione).

Assumendo che, in ogni caso, σ_2 si mantenga ben al di sotto della resistenza a compressione della muratura, ne consegue che la condizione limite insorge quando $\sigma_1 = f_t$, ossia la tens. princip. di trazione eguaglia la resistenza a trazione della muratura (ovviamente pensata <u>sin dall'inizio</u> come un materiale assimilabile ad un continuo omogeneo ed isotropo, in via semplificativa)

Fissata σ_0, quale tensione tangenziale corrisponde (nel punto P) al raggiungimento di $\sigma_1 = f_t$?



$$\tau_{P\,lim} = b \cdot \bar{\tau}_{lim}$$

Raggio del cerchio limite:

$$R = \sigma_1 - x_c = \sigma_1 - \left(-\frac{\sigma_0}{2}\right) = [[\sigma_1 = f_t]] = f_t + \frac{\sigma_0}{2}$$

Per il teorema di Pitagora, $R^2 = (x_c)^2 + (\tau_{P,lim})^2 \overset{!}{=} \frac{\sigma_0^2}{4} + \tau_{P,lim}^2$

quindi $$f_t^2 + \cancel{\frac{\sigma_0^2}{4}} + f_t \cdot \sigma_0 = \cancel{\frac{\sigma_0^2}{4}} + \tau_{P,lim}^2$$

$$\tau_{P,lim}^2 = f_t^2 \left(1 + \frac{\sigma_0}{f_t}\right) \quad \text{cioè} \quad \boxed{\tau_{P,lim} = f_t \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{f_t}}}$$

Ricordando che $\tau_{P,lim} = b \cdot \bar{\tau}_{lim}$: $b\,\bar{\tau}_{lim} = f_t \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{f_t}}$

quindi $$\bar{\tau}_{lim} = \frac{V_{lim}}{l \cdot t} = \frac{f_t}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{f_t}}$$

Se, come da normativa, indichiamo con τ_{od} la resistenza <u>media</u> a taglio in assenza di sforzo normale ($\sigma_0 = 0$), otteniamo che $\tau_{od} = f_t / b \Rightarrow f_t = b \cdot \tau_{od}$

di conseguenza $$\bar{\tau}_{lim} = \frac{\cancel{b} \cdot \tau_{od}}{\cancel{b}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{b \cdot \tau_{od}}}$$ se sostituiamo f_t

In conclusione, la resistenza a taglio calcolata come sopra porta al seguente valore critico di forza di taglio (critico in relazione alla fessurazione diagonale:

$$V_a = l \cdot t \cdot \bar{\tau}_{lim} = l \cdot t \cdot \tau_{od} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{b \cdot \tau_{od}}} = l \cdot t \cdot \frac{f_t}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{f_t}}$$

<u>NON È</u> $\frac{1.5\,\tau_{od}}{b}$ $\Rightarrow$ la prima parte della formula 8.7.7.1 non è corretta